ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΚΟΙΝΟ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ

6	10	15
0	0	0
6	10	15
12	20	30
18	30	45
24	40	60
30	50	75
36	60	

Πολλαπλάσια των αριθμών

- Το ΕΚΠ ορίζεται ως φυσικός ή ακέραιος αριθμός που είναι $\neq 0$.

Ορισμός

Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των μη μηδενικών ακεραίων $a_1, a_2 \ldots a_n$ είναι ένας φυσικός αριθμός m, τέτοιος ώστε

(i) $a_1 | m$, $a_2 | m \ldots$ $a_n | m$ και

(ii) Αν $a_1 | l$, $a_2 | l \ldots$ $a_n | l$ τότε $m \leq l$ (l φυσικός)

- $a_1 = p_1^{a_{11}} p_2^{a_{12}} \dots p_s^{a_{1s}}$
$a_2 = p_1^{a_{21}} p_2^{a_{22}} \dots p_s^{a_{2s}}$
$\vdots$ $\qquad a_{ij} \geq 0$
$a_n = p_1^{a_{n1}} p_2^{a_{n2}} \dots p_s^{a_{ns}}$

$$\text{μκδ}(a_1, a_2 \dots a_n) = p_1^{\min\{a_{11}, a_{21} \dots a_{n1}\}} \dots p_s^{\min\{a_{1s}, a_{2s} \dots a_{ns}\}}$$

$$\text{ΕΚΠ}(a_1, a_2 \dots a_n) = p_1^{\max\{a_{11} \dots a_{n1}\}} \dots p_s^{\max\{a_{1s} \dots a_{ns}\}}$$

- Όταν έχω δύο αριθμούς μόνο: (ΠΡΟΣΟΧΗ! δεν ισχύει για παραπάνω)
$a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}$
$b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_s^{b_s}$

$$\text{ΕΚΠ}(a,b) \cdot \text{μκδ}(a,b) = p_1^{\max\{a_1, b_1\}} \dots p_s^{\max\{a_s, b_s\}} p_1^{\min\{a_1, b_1\}} \dots p_s^{\min\{a_s, b_s\}} =$$
$$= p_1^{\max\{a_1, b_1\} + \min\{a_1, b_1\}} \dots p_s^{\max\{a_s, b_s\} + \min\{a_s, b_s\}} = (\alpha)$$

Έχω τρεις περιπτώσεις:
$a_1 < b_1$, $a_1 = b_1$, $a_1 > b_1$

οπότε:

$$\max\{a_1, b_1\} + \min\{a_1, b_1\} = \begin{cases} a_1 + b_1, & a_1 < b_1 \\ a_1 + b_1, & a_1 = b_1 \\ a_1 + b_1, & a_1 > b_1 \end{cases}$$

Σε κάθε περίπτωση θα έχω:

$$(\alpha) = p_1^{a_1 + b_1} \dots p_s^{a_s + b_s} = p_1^{a_1} \dots p_s^{a_s} \cdot p_1^{b_1} \dots p_s^{b_s} = a \cdot b$$

Άρα, $\text{ΕΚΠ}(a,b) \cdot \text{μκδ}(a,b) = ab$

Λήμμα του Ευκλείδη:

Αν $a|bc$ και $\text{μκδ}(a,b)=1$. Τότε:
Το $a|c$ όπου a,b,c είναι φυσικοί αριθμοί.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$a|bc \Rightarrow bc = a\mu$

$\text{μκδ}(a,b)=1 \Rightarrow 1 = \kappa a + \lambda b \quad \kappa,\lambda \in \mathbb{Z}$

$c = c\kappa a + c\lambda b = ac\kappa + \lambda a\mu = a(c\kappa + \lambda\mu) \Rightarrow a|c$

$c\kappa + \lambda\mu \in \mathbb{Z}$

Λήμμα:

Αν $b|a$ και $c|a$ και $\text{μκδ}(a,b,c)=1$
Τότε: $bc|a$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$b|a \Rightarrow a = b\mu \quad , \mu \in \mathbb{Z}$

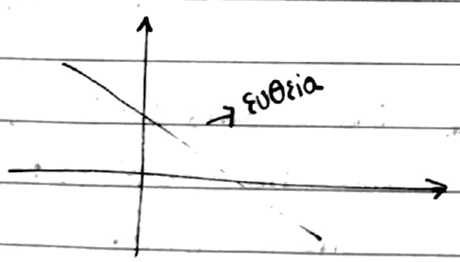
$c|a \Rightarrow a = c\cdot\nu \quad , \nu \in \mathbb{Z}$

$\text{μκδ}(b,c) = 1 \Rightarrow 1 = kb + \lambda c \Rightarrow a = kba + \lambda ca \Rightarrow a = kbc\nu + \lambda cb\mu \Rightarrow$

$\Rightarrow a = bc\underbrace{(k\nu + \lambda\mu)}_{\in \mathbb{Z}} \quad k,\lambda \in \mathbb{Z}$

▷ Εξισώσεις της μορφής $ax+by=\gamma$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$



Στη θεωρία αριθμών όμως θα ασχοληθούμε με εξισώσεις της μορφής $ax+by=\gamma$ που όμως θα έχουν ακέραιους συντελεστές, δηλ $a,\beta,\gamma \in \mathbb{Z}$

Ορισμός

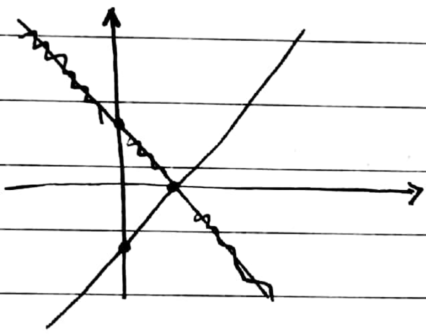
Το ζεύγος (x_0, y_0) είναι λύση της Διοφαντικής εξίσωσης $\alpha x+\beta y=\gamma$, όπου $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Z}$ αν

(i) $x_0\in\mathbb{Z}$, $y_0\in\mathbb{Z}$ και

(ii) $\alpha x_0+\beta y_0=\gamma$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί η Διοφαντική εξίσωση $10704x-2016y=1453$



Έστω $(x_0,y_0)\in\mathbb{Z}^2$ και

$$\underbrace{10704x_0-2016y_0}_{\text{άρτιος}}=\underbrace{1453}_{\text{περιττός}}$$

Άρα η διοφαντική εξίσωση $10704x-2016y=1453$ ΔΕΝ έχει λύση.

Θεώρημα:

Η γραμμική διοφαντική εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Z}$ έχει μια τουλάχιστον λύση αν-ν $d=\text{μκδ}(\alpha,\beta)$ διαιρεί τον γ.

Αν (x_0,y_0) είναι μια λύση* της $\alpha x+\beta y=\gamma$, τότε όλες οι λύσεις δίνονται από τις σχέσεις:

$x=x_0+\frac{\beta}{d}t$, $y=y_0-\frac{\alpha}{d}t$ όπου $t\in\mathbb{Z}$

{ΑΣΚΗΣΗ}

Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση $33x+27y=43$

ΛΥΣΗ

Πάντα όταν θέλω να λύσω μια δ.ε. , ψάχνω να βρω τον ΜΚΔ των συντελεστών του.

Δηλαδή:

$$ΜΚΔ(33,27) = 3$$

$33 = 1\cdot 27 + 6$

$27 = 4\cdot 6 + \boxed{3}$

$6 = 2\cdot 3 + 0$

όμως $3 \nmid 43$

Άρα η διοφαντική εξίσωση δεν έχει λύση

• Εάν στον σταθερό όρο είχα 42 , δηλαδή η δ.ε. γινόταν $33x+27y=42$

Θα είχα $ΜΚΔ(33,27)=3$

και $3/42$

Άρα η διοφαντική εξίσωση έχει λύσεις

Πάω να βρω μια λύση της εξίσωσης:

$3 = 27 - 4\cdot 6 = 27 - 4(33-27) = 5\cdot 27 - 4\cdot 33$

Οπότε έχουμε

$$\boxed{3 = 5\cdot 27 - 4\cdot 33}$$

Παρατηρώ ότι : $33x+27y=42$

$33\cdot(-4) + 27\cdot 5 = 3$

$33(-4\cdot 14) + 27(5\cdot 14) = 3\cdot 14$

$33\cdot \boxed{-56} + 27\cdot \boxed{70} = 42$

Βρήκα μια λύση την $x_0 = -56$

$y_0 = 70$

Αφού έχω βρεί μια λύση, σημαίνει οτι μπορώ να τις βρω όλες.

$x = -56 + \frac{27}{3} t$ και $y = 70 - \frac{33}{3} t$, $t \in \mathbb{Z}$

$x = -56 + 9t$ $y = 70 - 11t$, $t \in \mathbb{Z}$

——— " ——— " ———